Résumé
Nombres Complexes

Préparé par : Prof Rabie

2 BAC- PC/SVT

Remarque ①

$$\boxed{(i)^2 = -1}$$

$$\begin{pmatrix} (i)^3 = -i \\ (i)^4 = +1 \end{pmatrix}$$

Remarque ③

$$\boxed{z = x + iy}$$

- $Re(z) = x$: la partie réelle de z
- $Im(z) = y$: la partie imaginaire de z
- $i\,Im(z) = iy$: la partie imaginaire pur de z

Remarque ②

Module — arg

$$\boxed{z = x + iy = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = re^{i\theta}}$$

La Forme algébrique — La Forme trigonométrique — La Forme exponentielle

Remarque ④

conjugué

$$\boxed{\overline{x+iy} = x - iy}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{4+i} = 4-i \\ \overline{2-i} = 2+i \\ \overline{3i} = -3i \\ \overline{3} = 3 \end{pmatrix}$$

Remarque ⑤

$$\boxed{az^2 + bz + c = 0}$$

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

- $\Delta < 0$: $z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$, $z_2 = \overline{z_1}$
- $\Delta = 0$: $z = -\dfrac{b}{2a}$
- $\Delta > 0$: $z_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, $z_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

Remarque ⑩

Mesure de l'angle

$$\boxed{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) [2\pi]}$$

Remarque ⑥

Formule de moivre

$$\boxed{\left(r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))\right)^n = r^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)}$$

Remarque ⑦

Formule d'euler

$$\cos^m(nx) = \left(\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}\right)^m$$

$$\sin^m(nx) = \left(\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}\right)^m$$

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$
$$e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$$

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos(x)$$
$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin(x)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Remarque ⑧

Affixe

- $A(3,4) \longrightarrow z_A = 3 + 4i$, $a = 3 + 4i$, $Aff(A) = 3 + 4i$
- $\overrightarrow{AB} \longrightarrow z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
- $AB = |z_B - z_A|$
- I milieu du segment $[AB]$ $\rightarrow$ $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$
- G est le barycentre de $(A,\alpha), (B,\beta)$ et (C,γ) $\rightarrow$ $z_G = \dfrac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$

Remarque ⑨

A, B et C sont alignés

$$\Updownarrow$$

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \in \mathbb{R}$$

$$\left(O(0,0) \longrightarrow z_O = 0 \right)$$

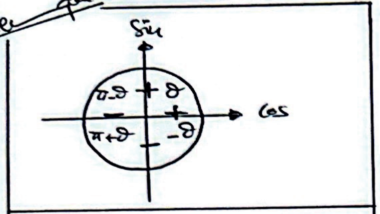
rabie.isli@gmail.com www.profrabiemaths.com Prof_Rabie_Maths 06 61 10 15 16

Résumé
Nombres Complexes

Préparé par : Prof Rabie

2 BAC- PC/SVT

Remarque (10)



cos	sin	
+	+	→ θ
+	−	→ $-\theta$
−	+	→ $\pi-\theta$
−	−	→ $\pi+\theta$

θ / cos

- $\frac{1}{2} \longrightarrow \frac{\pi}{3}$
- $\frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow \frac{\pi}{4}$
- $\frac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow \frac{\pi}{6}$

Remarque (11)

Module

$z = x$ ou $z = yi$ → M−R :

- $|2i| = 2$
- $|-3i| = 3$
- $|-4| = 4$
- $|7| = 7$

$z = x+iy$ → M− Simple :

- $|x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$
- $|x-iy| = \sqrt{x^2+y^2}$

→

- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
- $|z\times z'| = |z|\times|z'|$
- $|z^n| = |z|^n$
- $|z+z'| \leq |z|+|z'|$
- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

Remarque (13)

$a+ib = a'+ib' \iff \begin{cases} a=a' \\ b=b' \end{cases}$

Remarque (12)

$ABCD$ est un parallélogramme $\iff \vec{AB} = \vec{DC}$

$\iff z_B - z_A = z_C - z_D$

$z \in i\mathbb{R} \iff z = -\bar{z}$

Remarque (14)

$z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$

Module	Arg	La nature de triangle
1	$\pm\frac{\pi}{2}$	• (1) isocèle • $(\pm\frac{\pi}{2})$ rectangle
1	$\pm\frac{\pi}{3}$	• équilatéral
1	θ $\theta \neq \pm\frac{\pi}{2}$ et $\theta \neq \pm\frac{\pi}{3}$	• isocèle
$r \neq 1$	$\pm\frac{\pi}{2}$	• rectangle

→

• $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = 1i = \underbrace{1}_{\text{Module}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\underbrace{\frac{\pi}{2}}_{\text{Arg}}\right)\right)$

$\rightarrow \begin{cases} \left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} AB = AC \\ (\vec{AC}, \vec{AB}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$

d'où le triangle ABC est réctangle et isocèle en A.

• $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \underbrace{1}_{\text{Module}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\underbrace{\frac{\pi}{3}}_{\text{Arg}}\right)\right)$

$\rightarrow \begin{cases} \left|\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}\right) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} AC = DC \\ (\vec{CD}, \vec{CA}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$

d'où le triangle ABC est équilatéral

Remarque (15)

A et B et C et D des points cocycliques

↓

$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_D - z_C}{z_B - z_C} \in \mathbb{R}$

ou $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_C}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}$

rabie.isli@gmail.com www.profrabiemaths.com Prof_Rabie_Maths 06 61 10 15 16

Résumé
Nombres Complexes

Préparé par : Prof Rabie
2 BAC- PC/SVT

La Forme Trigonométrique

R-que (16)

(M1)

$z = x + iy$

↓

M- Simple

+	+	→ θ	$\frac{1}{2}$ → $\frac{\pi}{3}$
+	−	→ $-\theta$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ → $\frac{\pi}{4}$
−	+	→ $\pi - \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ → $\frac{\pi}{6}$
−	−	→ $\pi + \theta$	

- $z = \sqrt{3} + i$

→ $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = 2$

→ $z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$$\begin{cases} |z| = 2 \\ \arg(z) = \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \end{cases}$$

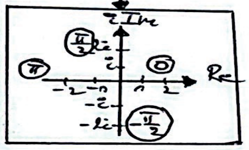
(M2)

$z = x$ ou $z = yi$

↓

M- Réduite

Arg



Module

$|2i| = 2$

$|-3i| = 3$

$|-4| = 4$

$|7| = 7$

$$\begin{pmatrix} 2i = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ -1i = 1\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ 3 = 3\left(\cos(0) + i\sin(0)\right) \\ -4 = 4\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right) \end{pmatrix}$$

(M3)

$z_1 \times z_2$	$\frac{z_1}{z_2}$	z^n

$z_1 \times z_2 = r_1 \times r_2\left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right)$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right)$

$z^n = r^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)$

R-que (18)

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z + \overline{z} = 2\,Re(z)$
- $z - \overline{z} = 2\,Im(z)$

L'ensemble des Points

R-que (17)

Module (1-1)

↓

Méthode géométrique

$1^{ère}$ étape	F : —
$2^{ème}$ étape	$z \to z_M$
$3^{ème}$ étape	$\lvert z_A - z_B \rvert$ = BA = AB

AM = R	cercle de centre A et de rayon R.
AM = BM	La médiatrice du segment [AB]
AM ≤ R	Disque de centre A et de rayon R.

(Z)

↓

Méthode algébrique

on remplace $z = x + iy$ et $\overline{z} = x - iy$

$Z \in \mathbb{R} \iff Im(Z) = 0$

$Z \in i\mathbb{R} \iff Re(Z) = 0$

$ax + by + c = 0$	L'ensemble des points M est la droite
$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$	L'ensemble des points M est le cercle

rabie.isli@gmail.com www.profrabiemaths.com Prof_Rabie_Maths 06 61 10 15 16

Résumé
Nombres Complexes

Préparé par : Prof Rabie
2 BAC- PC/SVT

2 que (15)

$M \xrightarrow{\text{Affixe}} z$ $M' \longrightarrow z'$ $\Omega \longrightarrow \omega$	$\vec{\Omega M} \xrightarrow{\text{Affixe}} z-\omega$ $\vec{\Omega M'} \longrightarrow z'-\omega$	$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ $e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$

$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi)$ $= -1 + 0$ $= -1$	$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ $= 0 + i\times 1$ $= i$

$e^{i2k\pi} = 1 \ / \ k\in\mathbb{Z}$

(R) → Rotation → $R_{(\Omega,\theta)}(M) = M' \iff \cancel{\vec{\Omega M'} = e^{i\theta}\vec{\Omega M}}$
$\iff z'-\omega = (\cos(\theta)+i\sin(\theta))(z-\omega)$

(h) → Homothétie → $h_{(\Omega,k)}(M) = M' \iff \vec{\Omega M'} = k\,\vec{\Omega M}$ ✓
$\iff z'-\omega = k(z-\omega)$

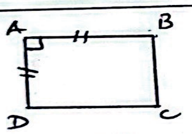
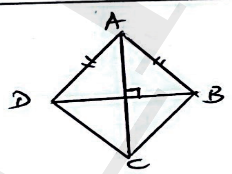
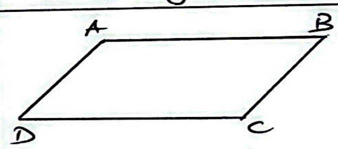
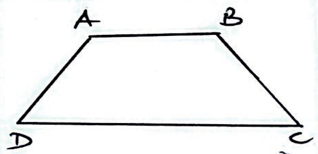
(t) → Translation → $t_{\vec{u}}(M) = M' \iff \vec{MM'} = \vec{u}$
$\iff z'-z = a$
$\iff z' = z+a$

2 que (21)

$R_{(\Omega,\theta)}(M) = M' \iff \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M'}) \equiv \theta\,[2\pi] \end{cases}$

2 que (20)

La Nature de Quadrilatère ABCD

Carré	Losange	Parallélogramme	Trapèze
 * parallélogramme $\vec{AB} = \vec{DC}$ * Deux cotés consécutifs isométriques $AB = AD$ * Un angle droit $(\vec{AB},\vec{AD}) \equiv \pm\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$	 M1 * parallélogramme $\vec{AB} = \vec{DC}$ * Deux cotés consécutifs isométriques $AB = AD$ M2 * parallélogramme $\vec{AB} = \vec{DC}$ * $(\vec{AC},\vec{DB}) \equiv \pm\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$	 $\vec{AB} = \vec{DC}$ $\iff z_B - z_A = z_C - z_D$	 $\vec{AB} = k\,\vec{DC}$ $\iff z_B - z_A = k(z_C - z_D)$

rabie.isli@gmail.com www.profrabiemaths.com Prof_Rabie_Maths 06 61 10 15 16